La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

A cada número de la *Revista* es proposaran dos problemes: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i es premiarà els guanyadors amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Juntament amb la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de gener de 2006 a:
probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat

Una partícula de massa m i càrrega q penetra amb una certa velocitat v en una regió on hi ha definit un camp magnètic constant B. Justifiqueu el tipus de moviment que tindrà la partícula en el si d'aquesta regió si:

a) La velocitat d'entrada és paral·lela al camp magnètic.
b) La velocitat d'entrada és perpendicular al camp magnètic.
c) La velocitat d'entrada i el camp magnètic formen un determinat angle α.

Problema per a l'alumnat universitari

María Victoria García-Cuenca, professora del Departament de Física Aplicada i Òptica de la UB, ens ha fet arribar la qüestió següent:

En la figura 1*a* es representa un camp magnètic variable amb el temps com $B = B_0 \cos 100\pi t$ i una espira circular de superfície S i resistència negligible; A i B són dues bombetes iguals i de resistència R. Per l'espira circula un corrent d'intensitat I. En les figures 1*b* i 1*c* els punts P i P' estan connectats per un fil conductor de resistència $r \ll R$.

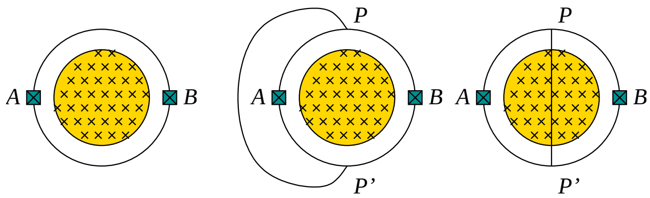
De les afirmacions següents, n'hi ha algunes que són certes en algun o alguns dels tres casos de la figura i n'hi ha d'altres que són falses. Establiu la correspondència entre les afirmacions *a*, *b*, *c*, tot justificant la certesa o falsedat de cadascuna.

1. La intensitat de corrent és

$$I = \frac{B_0 S 100\pi}{2R} \sin 100\pi t$$

en les dues bombetes i, per tant, llueixen igual.

2. La bombeta A s'apaga.
3. Quan la bombeta A s'apaga la bombeta B llueix més.
4. Quan la bombeta A s'apaga també s'apaga la bombeta B.
5. Per la bombeta B circula un corrent d'intensitat $2I$.
6. Per la bombeta A circula un corrent d'intensitat $2I$.
7. Per r circula un corrent d'intensitat $2I$.
8. Per r no circula corrent.



a) b) c)

Solució als problemes del número 28 de la *Revista*

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

La nostra solució és: les equacions del tir parabòlic indiquen que en cada instant es compleix:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = H + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Quan el cos toca a terra: $y = 0$ i $x = L$. Així doncs, en aquest instant tenim:

$$\begin{cases} L = v_0 \cos \alpha t \\ 0 = H + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Si en aquest sistema aïllem t de la primera equació, el substituïm a la segona i tenim en compte la relació trigonomètrica $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, obtindrem una equació de segon grau en què la incògnita és $\tan \alpha$. La seva resolució dóna:

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gL} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gH}{v_0^2} - \frac{g^2 L^2}{v_0^4}} \right). \tag{1}$$

Aquesta igualtat només té sentit si es compleix:

$$1 + \frac{2gH}{v_0^2} - \frac{g^2 L^2}{v_0^4} \geq 0.$$

És a dir:

$$L \leq \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}.$$

Per tant,

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}.$$

Així doncs, l'angle que estem buscant compleix de (2):

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{g L_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}.$$

Observem que en el cas particular que llancéssim el cos des del terra ($H = 0$), es compliria que $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.

Del problema per a l'alumnat universitari

Solució enviada per Albert Carrilero Carrió, estudiant de Física a la Universitat de Barcelona.

L'anell imaginat per Larry Niven ens evoca una construcció colossal, la qual és molt difícil de concebre mentalment en la seva dimensió real i impossible de realitzar com veurem a continuació.

Només cal mirar les dades d'aquest anell per adonarnos de la brutalitat de l'obra:

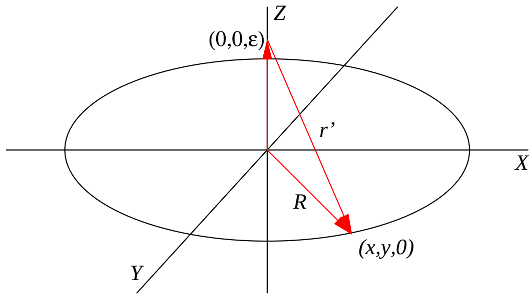
- 1 dia seria de 30 hores.
- La massa seria de $2 \cdot 10^{27}$ kg.
- El radi seria de 155 milions de km.
- El perímetre de 974 milions de km.

Un cop caracteritzat l'anell, procedirem a raonar què succeiria si es produïssin petits desplaçaments en l'eix de rotació.

Hem d'esbrinar quin comportament tindrà el sistema un cop se li ha aplicat una petita pertorbació (podem pensar en un xoc d'un meteorit), és a dir, si el sistema evoluciona cap a l'equilibri, en aquest cas seria una força restauradora o, al contrari, si el sistema evoluciona de manera diferent i de quina manera ho fa.

Podem descompondre aquest desplaçament en la suma de les components verticals i horitzontals. Per tant, analitzarem separadament un desplaçament vertical (eix Z) i posteriorment un desplaçament horitzontal (pla X-Y).

Desplaçament vertical:
Per al primer cas suposem que hi ha un desplaçament vertical entre el sistema Sol-anell.



Per poder quantificar aquest fenomen, hem d'emprar la llei de gravitació universal:

$$\vec{F} = -\frac{G\, M_{Sol}\, M_{anell}}{|\vec{r'}|^3} \vec{r'}. \tag{2}$$

Per poder resoldre el problema millor, utilitzarem les coordenades cilíndriques.

El nou vector té la direcció

$$\vec{r'} = (x, y, -\varepsilon), \tag{3}$$

que en cilíndriques és:

$$\vec{r'} = (R \cos \sigma, R \sin \sigma, -\varepsilon) \tag{4}$$

i el seu mòdul és:

$$|\vec{r'}| = (R^2 + \varepsilon^2)^{1/2}. \tag{5}$$

Tenim que la massa de l'anell equival a:

$$M_{anell} = \int_0^{2\pi} \rho\, R\, d\sigma, \tag{6}$$

ρ és la densitat lineal de l'anell.[1]

Agrupant termes, obtenim:

$$\vec{F} = -G\, M_{Sol}\, \rho\, R \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos \sigma, R \sin \sigma, -\varepsilon)\, d\sigma}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}, \tag{7}$$

on és pràcticament immediat de veure que les integrals en les coordenades r i σ són nul·les

$$F_r = 0, \quad F_\sigma = 0$$

[1] Per simplificar els càlculs i sense perdre informació, podem simplificar l'anell en un cercle ja que l'amplada és molt més inferior al diàmetre.

i, per tant, només tindrem l'aportació de la coordenada Z:

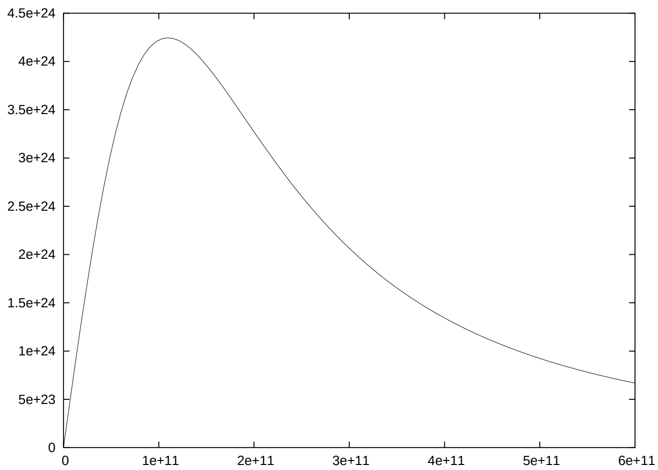
$$\vec{F}(z) = -G\, M_{Sol}\, \rho\, R \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon\, d\sigma}{(R^2+\varepsilon^2)^{3/2}}. \qquad (8)$$

Com que dins l'integrand no tenim res que depengui de σ, el resultat d'aquesta integral és immediat:

$$\vec{F}(z) = \frac{2\pi\, G\, M_{Sol}\, \rho\, R\, \varepsilon}{(R^2+\varepsilon^2)^{3/2}}. \qquad (9)$$

Hem obtingut un resultat amb signe positiu, la qual cosa ens demostra que la força que sorgeix com a resposta al desplaçament vertical té el mateix sentit i direcció que aquest; per tant, la força és restauradora i tendeix a tornar a la posició inicial.

Prenent: $M_{\text{Sol}} = 1,98 \cdot 10^{30}$kg, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $/rho = 2,06 \cdot 10^{15}$ kg/m, $R_{\text{anell}} = 155 \cdot 10^9$ m, la representació gràfica és:



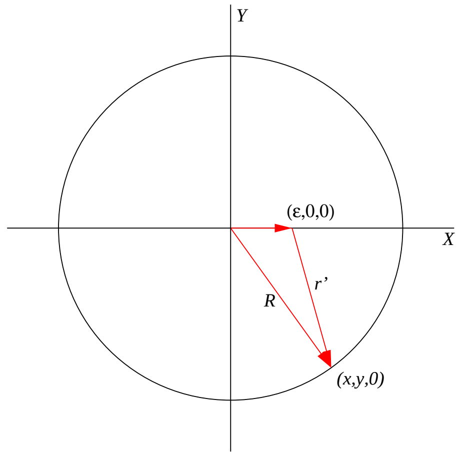
L'eix de les abscisses representa ε en metres i el de les ordenades la força en newtons

Observem que, per a desplaçaments petits (menors aprox. $1,1 \cdot 10^{11}$ m), la força d'atracció augmenta fins a un màxim i a partir d'aquest, si continuem augmentant la distància de separació, la força continua sent atractiva però va disminuint fins al límit on la força desapareixeria per a un desplaçament infinit.

Es tracta d'una situació d'equilibri estable, ja que per molt que separéssim l'anell del Sol (en l'eix Z), aquest sempre acabarien per tornar a la posició inicial ja que la força sempre és atractiva.

Desplaçament horitzontal

El segon cas ens porta a esbrinar com reaccionarà el sistema Sol-anell si es dóna una pertorbació horitzontal (pla X-Y). Per simplificar els càlculs, ometrem l'eix Z i també podem moure l'eix de coordenades fins a anul·lar una de les dues components (en aquest cas la Y) i per tant la força només dependrà del desplaçament en X.



El nou vector que ens dóna la direcció entre el Sol i un punt qualsevol de l'anell en polars és:

$$\vec{r'} = (R\cos\sigma - \varepsilon, R\sin\sigma) \qquad (10)$$

i el seu mòdul és:

$$|\vec{r'}| = (R^2+\varepsilon^2 - 2R\varepsilon\cos\sigma)^{1/2}. \qquad (11)$$

Prenent la força de 2 i la massa de l'anell de 6 i agrupant termes, obtenim:

$$\vec{F}(\varepsilon) = -G\, M_{Sol}\, \rho\, R \int_0^{2\pi} \frac{(R\cos\sigma - \varepsilon)\, d\sigma}{(R^2+\varepsilon^2-2R\varepsilon\cos\sigma)^{3/2}}. \qquad (12)$$

Aquesta integral no és immediata, però per saber si el sistema és inestable no ens cal resoldre-la. Si desenvolupem la força pel teorema de Taylor en funció de ε (amb $\varepsilon_0 = 0$), amb els primers termes (p. ex. ordre 1) podrem obtenir el comportament aproximat d'aquesta força

$$\vec{F}(\varepsilon) = -G\, M_{Sol}\, \rho\, R \int_0^{2\pi} \Bigg(\frac{\cos\sigma}{R^2} + \left(\frac{-1}{R^3} + \frac{3\cos^2\sigma}{R^3} \right) \varepsilon + \mathrm{O}(2) \Bigg)\, d\sigma. \qquad (13)$$

Ara, només cal resoldre les integrals definides immediates i obtenim:

$$\vec{F}(\varepsilon) \approx -\frac{G\, M_{Sol}\, \rho\, \pi\, \varepsilon}{R^2}\, \vec{\imath}. \qquad (14)$$

Hem obtingut una força negativa per a un desplaçament ε positiu, és a dir, de sentit contrari al desplaçament. Per tant, si l'anell tingués una petita pertorbació horitzontal, la força no intentaria restaurar la posició original sinó que tindria un sentit contrari a aquest desplaçament i el faria augmentar; per tant, és un sistema en equilibri inestable. La conseqüència d'aquesta inestabilitat seria que l'anell es precipitaria cap al Sol i acabaria xocant amb ell.